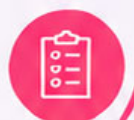


با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها



دانلود رایگان آزمون های آزمایشی
قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...



دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس



دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی
(نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی



دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی
و شب امتحانی

همه چیز
برای موفقیت
تو!

Google

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه

کافیست هر فایلی که نیاز دارید
را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir



t.me/irantooshe





گام به گام ریاضی هشتم

فصل دوم

عنوان فصل: اعداد اول

از صفحه‌ی ۲۱ تا صفحه‌ی ۳۰ کتاب

در این فایل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای کلاسی، تمرین‌ها و پرسش‌های فصل اعداد اول آمده است.
مباحث فصل: گفت‌وگو، یادآوری اعداد اول، تعیین اعداد اول، ماشین کانوی

تهیه شده در ایران توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست پرسش‌ها

۱	صفحه ۲۴ · تمرین ۱ — یادآوری عددهای اول	۵
۲	صفحه ۲۴ · تمرین ۲ — یادآوری عددهای اول	۵
۳	صفحه ۲۴ · تمرین ۳ — یادآوری عددهای اول	۶
۴	صفحه ۲۴ · تمرین ۴ — یادآوری عددهای اول	۷
۵	صفحه ۲۴ · تمرین ۵ (الف) — یادآوری عددهای اول	۸
۶	صفحه ۲۴ · تمرین ۵ (ب) — یادآوری عددهای اول	۸
۷	صفحه ۲۵ · تمرین ۶ (الف) — یادآوری عددهای اول	۹
۸	صفحه ۲۵ · تمرین ۶ (ب) — یادآوری عددهای اول	۹
۹	صفحه ۲۵ · تمرین ۷ — یادآوری عددهای اول	۱۰
۱۰	صفحه ۲۵ · تمرین ۸ (الف) — یادآوری عددهای اول	۱۰
۱۱	صفحه ۲۵ · تمرین ۸ (ب) — یادآوری عددهای اول	۱۲
۱۲	صفحه ۲۶ · تمرین ۹ — یادآوری عددهای اول	۱۴

۱۳	صفحه ۲۶ · تمرین ۱ (الف) — تعیین عددهای اول	۱۵
۱۴	صفحه ۲۶ · تمرین ۱ (ب) — تعیین عددهای اول	۱۶
۱۵	صفحه ۲۶ · تمرین ۱ (ج) — تعیین عددهای اول	۱۶
۱۶	صفحه ۲۶ · تمرین ۱ (د) — تعیین عددهای اول	۱۶
۱۷	صفحه ۲۶ · تمرین ۱ (ه) — تعیین عددهای اول	۱۷
۱۸	صفحه ۲۷ · تمرین ۲ (الف) — تعیین عددهای اول	۱۸
۱۹	صفحه ۲۷ · تمرین ۲ (ب) — تعیین عددهای اول	۱۸
۲۰	صفحه ۲۷ · تمرین ۲ (ج) — تعیین عددهای اول	۱۹
۲۱	صفحه ۲۷ · تمرین ۳ (الف) — تعیین عددهای اول	۲۰
۲۲	صفحه ۲۸ · تمرین ۳ (ب) پروژه — تعیین عددهای اول	۲۱
۲۳	صفحه ۲۸ · تمرین ۴ — تعیین عددهای اول	۲۱
۲۴	صفحه ۲۸ · تمرین ۵ — تعیین عددهای اول	۲۲
۲۵	صفحه ۲۹ · تمرین ۶ — تعیین عددهای اول	۲۳
۲۶	صفحه ۲۹ · تمرین ۷ — تعیین عددهای اول	۲۳

Y

حالت دوم: $n+1=k^2$ و $n-1=k^2-2$ اول باشد. چون $n=k^2-1$ دو رقمی است، k برابر ۴ تا ۱۰ است.

$n=k^2-1$	اول است؟	k^2-2	k
—	خیر	۱۴	۴
۲۴	بله	۲۳	۵
—	خیر	۳۴	۶
۴۸	بله	۴۷	۷
—	خیر	۶۲	۸
۸۰	بله	۷۹	۹
—	خیر	۹۸	۱۰

اعداد مطلوب: ۱۰ (قبل از آن $9=3^2$ و بعد ۱۱ اول)، ۲۴ (۲۳ اول و $25=5^2$)، ۴۸ (۴۷ اول و $49=7^2$)، ۸۰ (۷۹ اول و $81=9^2$) و ۸۲ ($81=9^2$ و ۸۳ اول).

پاسخ: ۵ عدد (۱۰، ۲۴، ۴۸، ۸۰ و ۸۲)

تمرین ۳

صفحه ۲۴

۳

۳. مربع زیر را با اعداد اول دو رقمی طوری پر کنید که یک مربع جادویی حاصل شود.

۱۱۳	۵	
	۱۰۱	

در مربع جادویی، مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر دو قطر برابر عدد ثابتی مانند S است. خانه‌ها را به این صورت نام‌گذاری می‌کنیم:

سطر اول: a, b, c ؛ سطر دوم: $e, 5, 113$ ؛ سطر سوم: $g, h, 101$.

۱. $\bigcirc$ از سطر میانی: $113 + e + 5 = S$ ، پس $e = S - 118$.

۲. $\bigcirc$ سطر میانی، ستون میانی و دو قطر هر چهار از خانه‌ی e می‌گذرند. مجموع این چهار خط برابر $4S$ است. در این مجموع، هر یک از هشت خانه‌ی دیگر دقیقاً یک بار و e چهار بار شمرده می‌شود؛ یعنی مجموع چهار خط برابر (مجموع هر نه خانه) $+ 3e$ است. مجموع نه خانه برابر مجموع سه سطر، یعنی $3S$ است؛ پس $4S = 3S + 3e$ و $e = S \div 3$.

۳. $\bigcirc$ از دو رابطه: $S - 118 = S \div 3$ ، پس $2S \div 3 = 118$ و $S = 177$ ؛ در نتیجه $e = 177 - 118 = 59$.

4. ☐ ستون سمت راست: $c+5+101=177$ ، پس $c=71$.

5. ☐ قطر شامل c : $71+59+g=177$ ، پس $g=47$.

6. ☐ قطر دیگر: $a+59+101=177$ ، پس $a=17$.

7. ☐ سطر اول: $17+b+71=177$ ، پس $b=89$. سطر آخر: $47+h+101=177$ ، پس $h=29$.

بررسی: ستون چپ $17+113+47=177$ ، ستون میانی $89+59+29=177$ ، و هر شش عدد به دست آمده $(17, 89, 47, 113, 29, 101)$ عدد اول اند.

17	89	71
113	59	5
47	29	101

پاسخ: سطر اول 17، 89، 71؛ سطر دوم 113، 59، 5؛ سطر سوم 47، 29، 101 (مجموع هر سطر، ستون و قطر 177)

تمرین 4

صفحه 24

4

در دو مسئله ی بعد، به دو عدد همسایه می گوئیم هرگاه خانه های آنها در یک ضلع مشترک باشند. 4 اعداد 1 تا 9 را طوری در یک جدول 3×3 بچینید که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند.

یک چینش درست در شکل زیر آمده است:

1	2	3
6	5	4
7	8	9

بررسی همه ی جفت های همسایه (12 جفت): در سطرها: $(1,2)$ ، $(2,3)$ ، $(6,5)$ ، $(5,4)$ ، $(7,8)$ ، $(8,9)$ که هر کدام دو عدد متوالی اند و دو عدد متوالی نسبت به هم اول اند. در ستون ها: $(1,6)$ و $(6,7)$ و $(2,5)$ و $(5,8)$ و $(3,4)$ و $(4,9)$ ؛ در همه ی آنها بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک 1 است (مثلاً $4 = 2^2$ و $9 = 3^2$ هیچ شمارنده ی اول مشترکی ندارند).

پاسخ: مثلاً 9 8 7 / 4 5 6 / 3 2 1 (پاسخ یکتا نیست)

۵. الف) نمی‌توان اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ را طوری در خانه‌های خالی جدول زیر قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند. چرا؟

	۸		۱۶
۴		۱۲	
	۶		۱۴
۲		۱۰	

خانه‌های جدول را با (سطر، ستون) نشان می‌دهیم (سطر از بالا و ستون از چپ). اعداد ۶ و ۱۲ در خانه‌های (۳،۲) و (۲،۳) هستند و هر دو مضرب ۳ اند.

اعداد ۳، ۹ و ۱۵ نیز مضرب ۳ اند؛ پس اگر یکی از آنها کنار ۶ یا ۱۲ قرار بگیرد، دو عدد همسایه شمارنده‌ی مشترک ۳ دارند و نسبت به هم اول نیستند. بنابراین ۳، ۹ و ۱۵ را نمی‌توان در خانه‌ای گذاشت که با ۶ یا ۱۲ همسایه است.

- خانه‌های خالی کنار ۶: (۲،۲)، (۴،۲)، (۳،۱) و (۳،۳).
 - خانه‌های خالی کنار ۱۲: (۱،۳)، (۳،۳)، (۲،۲) و (۲،۴).
 - در مجموع شش خانه از هشت خانه‌ی خالی کنار ۶ یا ۱۲ هستند؛ فقط دو خانه‌ی (۱،۱) و (۴،۴) می‌مانند.
- ولی سه عدد ۳، ۹ و ۱۵ باید در خانه‌های خالی بروند و فقط دو خانه برای آنها باقی مانده است؛ پس این کار شدنی نیست.

پاسخ: سه عدد مضرب ۳ (۳، ۹، ۱۵) فقط می‌توانند در دو خانه‌ی (۱،۱) و (۴،۴) بروند که ممکن نیست.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



ب) آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۱۶ را طوری در یک جدول 4×4 قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند؟

بله. یک چینش:

۱	۲	۳	۴
۶	۵	۸	۹
۷	۱۲	۱۱	۱۴
۱۰	۱۳	۱۶	۱۵

بررسی (۲۴ جفت همسایه): سطرها: (۱،۲)، (۲،۳)، (۳،۴)، (۴،۵)، (۵،۸)، (۸،۹)، (۷،۱۲)، (۱۲،۱۱)، (۱۱،۱۴)، (۱۰،۱۳)، (۱۳،۱۶)، (۱۶،۱۵). ستون‌ها: (۱،۶)، (۶،۷)، (۷،۱۰)، (۱۰،۵)، (۵،۱۲)، (۱۲،۱۳)، (۱۳،۸)، (۸،۱۱)، (۱۱،۱۶)، (۱۶،۹)، (۹،۱۴)، (۱۴،۱۵). در هر جفت، دو عدد شمارنده‌ی اول مشترک ندارند، پس بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان ۱ است.
برای نمونه $۶ = ۲ \times ۳$ و ۵ ؛ $۵ = ۳ \times ۲ = ۱۲$ ؛ $۳ = ۲^3 = ۸$ و $۲^2 = ۹$ ؛ $۳^2 = ۹$ و $۷ \times ۲ = ۱۴$ و $۱۵ = ۳ \times ۵$.

پاسخ: بله؛ مثلاً چینش بالا (پاسخ یکتا نیست).

۷

صفحه ۲۵

تمرین ۶ (الف)

۶. الف) همه‌ی اعداد کوچک‌تر از ۳۰ را بنویسید که نسبت به ۳۰ اول‌اند.

$۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$. عددی نسبت به ۳۰ اول است که هیچ‌یک از اعداد اول ۲، ۳ و ۵ آن را نشمارد؛ یعنی مضرب ۲، ۳ و ۵ نباشد. اعداد ۱ تا ۲۹ را بررسی می‌کنیم و مضرب‌های ۲ (زوج‌ها)، ۳ و ۵ را کنار می‌گذاریم. باقی‌مانده:

پاسخ: ۱، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹ (هشت عدد)

۸

صفحه ۲۵

تمرین ۶ (ب)

ب) چند عدد کوچک‌تر از ۱۲۱ وجود دارد که نسبت به ۱۲۱ اول باشد؟

$۱۲۱ = ۱۱ \times ۱۱$ و ۱۱ عدد اول است. شمارنده‌های ۱۲۱ فقط ۱، ۱۱ و ۱۲۱‌اند؛ پس عددی نسبت به ۱۲۱ اول نیست که مضرب ۱۱ باشد.

اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۲۱، یعنی ۱ تا ۱۲۰، جمعاً ۱۲۰ عدد است. مضرب‌های ۱۱ در بین آنها: ۱۱×۱ ، ۲×۱۱ ، ...، ۱۱ مضرب ۱۱ است (که $۱۱۰ = ۱۰ \times ۱۱$) دیگر کوچک‌تر از ۱۲۱ نیست). پس $۱۱۰ = ۱۲۰ - ۱۰$.

پاسخ: ۱۱۰ عدد

۷. عددی اول، مانند p داده شده است. چند عدد طبیعی وجود دارد که:

(الف) از p کوچکتر و نسبت به p اول باشد؟

(ب) از p^2 کوچکتر و نسبت به p اول باشد؟

(ج) از p^2 کوچکتر و نسبت به p^2 اول باشد؟

(د) از p^p کوچکتر و نسبت به p اول باشد؟

چون p اول است، شمارنده‌های آن فقط ۱ و p اند؛ پس عدد طبیعی n نسبت به p اول نیست اگر و فقط اگر p آن را بشمارد، یعنی n مضرب p باشد.

(الف) اعداد ۱، ۲، ...، $p-1$ همه از p کوچک‌ترند و هیچ‌کدام مضرب p نیستند (کوچک‌ترین مضرب طبیعی p ، خود p است). پس همه‌ی این $p-1$ عدد نسبت به p اول‌اند.

(ب) اعداد ۱ تا p^2-1 ، جمعاً p^2-1 عدداند. مضرب‌های p در آنها: $p \times 1, p \times 2, \dots, p \times (p-1)$ که $p-1$ عدد است. پس تعداد خواسته شده $p^2 - p = (p^2-1) - (p-1)$ است.

(ج) شمارنده‌های p^2 عبارت‌اند از ۱، p و p^2 . عددی نسبت به p^2 اول نیست اگر و فقط اگر شمارنده‌ی مشترکی غیر از ۱ با p^2 داشته باشد؛ یعنی p یا p^2 آن را بشمارد، و در هر دو حالت p آن عدد را می‌شمارد. پس «اول بودن نسبت به p^2 » با «اول بودن نسبت به p » یکی است و جواب مانند (ب) است: $p^2 - p$.

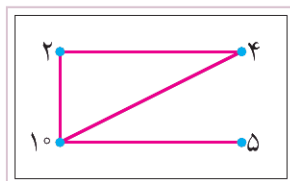
(د) اعداد ۱ تا $p^p - 1$ جمعاً $p^p - 1$ عددند. مضرب‌های p در آنها: $p \times k$ با $k=1, 2, \dots$ تا $k = p^{p-1} - 1$ (زیرا $p^p = p \times p^{p-1}$ از p^p کوچک‌تر نیست)، که $p^{p-1} - 1$ عدد است. پس تعداد خواسته شده برابر است با $p^p - (p^{p-1} - 1) = p^p - p^{p-1} + 1$.

آزمایش با $p=2$: اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴ که نسبت به ۲ اول‌اند، ۱ و ۳ (۲ عدد) و فرمول (ب) و (ج) می‌دهد $2^2 - 2 = 2$ ؛ اعداد کوچک‌تر از $2^2=4$ برای (د) نیز همان دو عدداند و فرمول (د) می‌دهد $2^2 - 2^1 + 1 = 2$.

پاسخ: (الف) $p-1$ (ب) $p^2 - p$ (ج) $p^2 - p$ (د) $p^p - p^{p-1} + 1$

۸. در شکل زیر، فقط اعدادی که نسبت به هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کرده‌ایم.

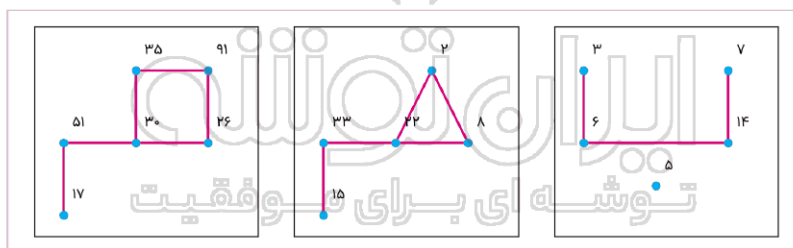
الف) در هر یک از کادرهای زیر، اعدادی که نسبت به هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کنید. سپس عبارت به دست آمده را بخوانید!



دو عدد را وقتی وصل می‌کنیم که شمارنده‌ی اول مشترک داشته باشند (بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترکشان بیش از ۱ باشد). کادرها را از راست به چپ، مانند صفحه‌ی کتاب، بررسی می‌کنیم.

- **کادر راست** (۳، ۷، ۶، ۱۴، ۵): خطوط: ۳ با ۶ (شمارنده‌ی مشترک ۳)، ۶ با ۱۴ (۲)، ۱۴ با ۷ (۷). عدد ۵ با هیچ‌کدام وصل نمی‌شود.
- **کادر وسط** (۲، ۸، ۳۳، ۲۲، ۱۵): خطوط: ۲ با ۸ (۲)، ۲ با ۲۲ (۲)، ۸ با ۲۲ (۲)، ۲۲ با ۳۳ (۱۱)، ۳۳ با ۱۵ (۳).
- **کادر چپ** (۳۵، ۹۱، ۵۱، ۳۰، ۲۶، ۱۷): خطوط: ۳۵ با ۹۱ (۷)، ۳۵ با ۳۰ (۵)، ۹۱ با ۲۶ (۱۳)، ۲۶ با ۳۰ (۲)، ۳۰ با ۵۱ (۳)، ۵۱ با ۱۷ (۱۷).

همه‌ی جفت‌های دیگر نسبت به هم اول‌اند و وصل نمی‌شوند. شکل حاصل:



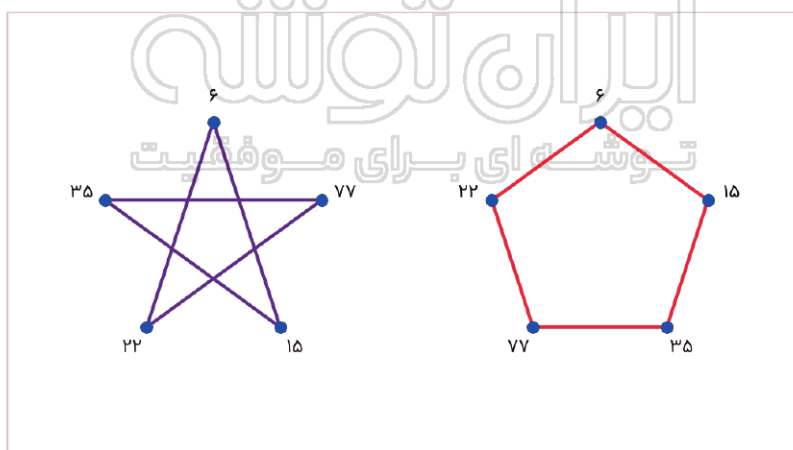
خواندن شکل‌ها: مثلاً در کادر راست، ۵ با همه‌ی عددهای دیگر اول است و تنها می‌ماند؛ در کادر وسط عددهای ۲ و ۸ و ۲۲ با هم یک مثلث می‌سازند (همه زوج‌اند)؛ در کادر چپ، ۳۰ به ۳۵، ۲۶ و ۵۱ وصل است و ۱۷ فقط به ۵۱ (چون $۱۷ \times ۳ = ۵۱$).

این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



شکل دوم (ستاره): رأس‌ها را از بالا و در جهت عقربه‌های ساعت T_1 تا T_5 بنامید. خطوط ستاره: T_1T_3 ، T_1T_4 ، T_2T_4 و T_5T_2 که یک مسیر بسته‌ی پنج‌رأسی می‌سازند. همان پنج عدد را به‌ترتیب این مسیر می‌گذاریم: $T_1 = 6$ ، $T_3 = 15$ ، $T_5 = 35$ ، $T_2 = 77$ ، $T_4 = 22$. پس عددها از بالا در جهت عقربه‌های ساعت ۶، ۷۷، ۱۵، ۲۲، ۳۵ هستند (شکل زیر؛ ستاره‌ی چپ و پنج‌ضلعی راست). عددهای وصل‌شده (۶ و ۱۵، ۱۵ و ۳۵، ۳۵ و ۲۲، ۲۲ و ۷۷، ۷۷ و ۶) شمارنده‌ی اول مشترک دارند و عددهای وصل‌نشده (۶ و ۷۷، ۱۵ و ۲۲، ۲۲ و ۳۵، ۳۵ و ۱۵) هیچ شمارنده‌ی اول مشترک ندارند.



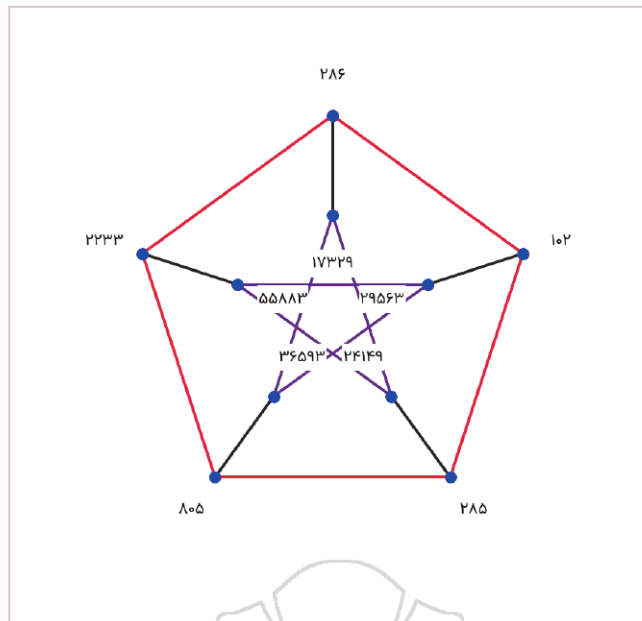
شکل سوم: پنج ضلعی بیرونی (قرمز)، ستاره‌ی درونی (بنفش) و پنج پاره‌خط سیاه بین رأس‌های بیرونی و درونی، جمعاً ۱۵ پاره‌خط. در این شکل هیچ سه رأسی دو به دو به هم وصل نیستند؛ پس هر عدد اول فقط می‌تواند در دو عدد وصل‌شده‌ی مجاور بیاید. بنابراین به هر پاره‌خط یک عدد اول متفاوت می‌دهیم (۱۵ عدد اول: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷) و عدد هر رأس را حاصل ضرب سه عدد اولی می‌گیریم که روی سه پاره‌خط رسیده به آن رأس‌اند. اینگونه دو رأس وصل‌شده دقیقاً یک شمارنده‌ی اول مشترک دارند و دو رأس وصل‌نشده هیچ شمارنده‌ی اول مشترکی ندارند.

رأس‌های پنج ضلعی بیرونی را از بالا و در جهت عقربه‌های ساعت A۱ تا A۵ و رأس درونی مقابل هر کدام را B۱ تا B۵ بنامید. اعداد اول را این‌گونه روی پاره‌خط‌ها می‌گذاریم:

پاره‌خط‌ها	عدد اول
A۱A۲, A۲A۳, A۳A۴, A۴A۵, A۵A۱ (قرمز)	۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱
A۱B۱, A۲B۲, A۳B۳, A۴B۴, A۵B۵ (سیاه)	۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹
B۱B۲, B۲B۳, B۳B۴, B۴B۱, B۵B۲ (بنفش)	۳۱، ۳۷، ۴۱، ۴۳، ۴۷

عددهای رأس‌ها

رأس	تجزیه	عدد
A۱ (بالا)	$2 \times 11 \times 13$	۲۸۶
A۲	$2 \times 3 \times 17$	۱۰۲
A۳	$3 \times 5 \times 19$	۲۸۵
A۴	$5 \times 7 \times 23$	۸۰۵
A۵	$7 \times 11 \times 29$	۲۲۳۳
B۱	$13 \times 31 \times 43$	۱۷۳۲۹
B۲	$17 \times 37 \times 47$	۲۹۵۶۳
B۳	$19 \times 31 \times 41$	۲۴۱۴۹
B۴	$23 \times 37 \times 43$	۳۶۵۹۳
B۵	$29 \times 41 \times 47$	۵۵۸۸۳



(در شکل، عدد رأس‌های بیرونی کنار خود رأس و عدد رأس‌های درونی بین رأس و مرکز نوشته شده است.)

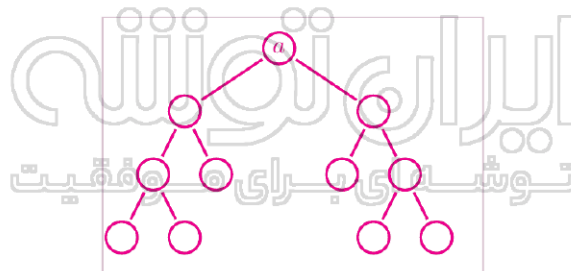
پاسخ: پنج‌ضلعی: ۶، ۱۵، ۳۵، ۷۷، ۲۲؛ ستاره: همان اعداد (مطابق شکل)؛ شکل سوم: اعداد جدول بالا (پاسخ یکتا نیست).

تمرین ۹

صفحه ۲۶

۱۲

۹. نمودار درختی زیر، برای تجزیه‌ی عدد a رسم شده است. کدام یک از اعداد ۶۴، ۱۳۰×۹۹ ، ۳۵×۳۶ و ۱۶۸ نمی‌تواند برابر a باشد؟



در نمودار درختی تجزیه، هر دایره‌ی انتهایی (که شاخه‌ای از آن نمی‌رود) یک عدد اول است. در نمودار شش دایره‌ی انتهایی هست (سه دایره در شاخه‌ی چپ و سه در شاخه‌ی راست). پس a حاصل ضرب دقیقاً ۶ عدد اول است (عددهای تکراری جداگانه شمرده می‌شوند).

تعداد عامل‌های اول هر عدد را می‌شماریم:

- $۶۴ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲$: شش عامل اول. ممکن است.
- $۱۳۰ \times ۹۹ = (۲ \times ۵ \times ۱۳) \times (۳ \times ۳ \times ۱۱)$: شش عامل اول. ممکن است.
- $۳۵ \times ۳۶ = (۵ \times ۷) \times (۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳)$: شش عامل اول. ممکن است.

○ $168 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$: فقط پنج عامل اول. نمی‌تواند باشد.

پاسخ: ۱۶۸

تمرین ۱ (الف)

صفحه ۲۶

۱۳

۱. یک عدد مرکب را «تقریباً اول» می‌نامیم، هرگاه هر دو شمارنده‌ی آن، به غیر از خود عدد، نسبت به هم اول باشند. برای مثال عدد ۱۵ یک عدد تقریباً اول است، زیرا هر دو شمارنده‌های ۱، ۳ و ۵ نسبت به هم اول‌اند؛ ولی عدد ۱۲ تقریباً اول نیست، زیرا شمارنده‌های ۲ و ۶ نسبت به هم اول نیستند.
الف) اعداد تقریباً اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید و آنها را به‌ترتیبی که در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ حذف می‌شوند، مرتب کنید.

شناخت این اعداد. ادعا: عدد مرکب n تقریباً اول است اگر و فقط اگر حاصل ضرب دقیقاً دو عدد اول (برابر یا متفاوت) باشد، یعنی $n = p^2$ یا $n = p \times q$.

○ اگر $n = p \times q$ با $p \neq q$ اول: شمارنده‌های غیر از خود عدد، 1 ، p و q ‌اند که دو به دو نسبت به هم اول‌اند. اگر $n = p^2$: این شمارنده‌ها 1 و p ‌اند که اول‌اند نسبت به هم. پس هر دو نوع تقریباً اول‌اند.
○ اگر n سه عامل اول یا بیشتر داشته باشد، یعنی حاصل ضرب اول‌های $p, q, r, \dots$ باشد (برابر یا متفاوت)، آنگاه p و $p \times q$ هر دو شمارنده‌ی n غیر از خود n و متفاوت‌اند و شمارنده‌ی مشترک p دارند؛ پس n تقریباً اول نیست (مثل $12 = 2 \times 2 \times 3$ با شمارنده‌های ۲ و ۶).

پس باید اعدادی کوچک‌تر از ۱۰۰ را بنویسیم که حاصل ضرب دو عدد اول باشند. در غربال، ابتدا مضرب‌های ۲ (به جز خود ۲) حذف می‌شود، سپس مضرب‌های باقی‌مانده‌ی ۳، بعد ۵ و بعد ۷ (چون $11^2 = 121$ بزرگ‌تر از ۱۰۰ است، دیگر نیازی به عدد اول بزرگ‌تر نیست). اعداد تقریباً اول را به‌ترتیب حذف می‌نویسیم:

○ مرحله‌ی ۲ (عدد ۱۵): ۴، ۶، ۱۰، ۱۴، ۲۲، ۲۶، ۳۴، ۳۸، ۴۶، ۵۸، ۶۲، ۷۴، ۸۲، ۸۶، ۹۴

○ مرحله‌ی ۳ (عدد ۱۰): ۹، ۱۵، ۲۱، ۳۳، ۳۹، ۵۱، ۵۷، ۶۹، ۸۷، ۹۳

○ مرحله‌ی ۵ (عدد ۶): ۲۵، ۳۵، ۵۵، ۶۵، ۸۵، ۹۵

○ مرحله‌ی ۷ (عدد ۳): ۴۹، ۷۷، ۹۱

در هر مرحله اعداد به‌ترتیب صعودی حذف می‌شوند. اعدادی مانند ۸ یا ۱۲ یا ۱۸ (که سه عامل اول یا بیشتر دارند) نیز در غربال حذف می‌شوند، ولی تقریباً اول نیستند.

پاسخ: ۳۴ عدد: ۴، ۶، ۱۰، ۱۴، ۲۲، ۲۶، ۳۴، ۳۸، ۴۶، ۵۸، ۶۲، ۷۴، ۸۲، ۸۶، ۹۴، ۹، ۱۵، ۲۱، ۳۳، ۳۹، ۵۱، ۵۷، ۶۹، ۸۷، ۹۳، ۲۵، ۳۵، ۵۵، ۶۵، ۸۵، ۹۵، ۴۹، ۷۷، ۹۱

۱. (ب) چند عدد دو رقمی تقریباً اول وجود دارد که نسبت به ۳۳۰ اول باشد؟

$۳۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۱$. عددی نسبت به ۳۳۰ اول است که هیچ کدام از اعداد اول ۲، ۳، ۵ و ۱۱ در تجزیه اش نباشند. پس عدد دو رقمی تقریباً اول مورد نظر، حاصل ضرب دو عدد اول از میان ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ... است.

○ $۴۹ = ۷ \times ۷$ (دو رقمی است)

○ $۹۱ = ۱۳ \times ۷$ (دو رقمی است)

○ $۱۱۹ = ۱۷ \times ۷$ (سه رقمی است) و حاصل ضرب های بزرگ تر مانند $۱۳ \times ۱۳ = ۱۶۹$ نیز سه رقمی یا بیشتر است.

بررسی: بزرگ ترین مقسوم علیه مشترک ۴۹ با ۳۳۰ و ۹۱ با ۳۳۰ برابر ۱ است.

پاسخ: ۲ عدد (۴۹ و ۹۱)

۱. (ج) آیا حاصل ضرب دو عدد تقریباً اول، می تواند عددی تقریباً اول باشد؟

نه. فرض کنید a و b دو عدد تقریباً اول باشند و $a = p \times q$ با p و q اول، و $n = a \times b$.

هر دو عدد a و b از ۱ بزرگ ترند. پس p و a هر دو شمارنده ی n هستند و از خود n کوچک ترند ($p < a < a \times b = n$), دو عدد متفاوت اند و p آنها را می شمارد، یعنی شمارنده ی مشترک p دارند و نسبت به هم اول نیستند. پس n تقریباً اول نیست.

مثال: $۶۰ = ۱۰ \times ۶$ تقریباً اول نیست، زیرا شمارنده های ۲ و ۶ آن نسبت به هم اول نیستند. همچنین، هر عدد تقریباً اول دو عامل اول دارد و حاصل ضرب دو چنین عددی چهار عامل اول دارد.

توشه ای برای موفقیت

پاسخ: خیر

۱. (د) کوچک ترین عددی را بیابید که اعداد دو رقمی تقریباً اول، نسبت به آن عدد، اول نباشند.

منظور: کوچک ترین عدد طبیعی N که هیچ عدد دو رقمی تقریباً اولی نسبت به آن اول نباشد، یعنی با N شمارنده ی اول مشترک داشته باشد.

اعداد دو رقمی تقریباً اول (از تمرین قبل): ۱۰، ۱۴، ۱۵، ۲۱، ۲۲، ۲۵، ۲۶، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۸، ۳۹، ۴۶، ۴۹، ۵۱، ۵۵، ۵۷، ۵۸، ۶۲، ۶۵، ۶۹، ۷۴، ۷۷، ۸۲، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۹۱، ۹۳، ۹۴، ۹۵.

۱. $۵ \times ۵ = ۲۵$ فقط شمارنده‌ی اول ۵ دارد؛ پس N مضرب ۵ است. عدد $۷ \times ۷ = ۴۹$ فقط شمارنده‌ی اول ۷ دارد؛ پس N مضرب ۷ است.
۲. اگر N فرد باشد، $۱۱ \times ۲ = ۲۲$ ایجاب می‌کند $۱۱ \mid N$ ، $۲ \times ۱۳ = ۲۶$ ایجاب می‌کند $۱۳ \mid N$ ، و غیره؛ در این حالت N مضرب $۵ \times ۷ \times ۱۱ \times ۱۳ = ۵۰۰۵$ است که بزرگ‌تر از ۲۱۰ است. پس برای کوچک‌ترین N باید زوج باشد: N مضرب $۷ \times ۵ \times ۲ = ۷۰$ است.
۳. اگر $N \mid ۳$ نباشد، $۱۱ \times ۳ = ۳۳$ ایجاب می‌کند $۱۱ \mid N$ و $۱۳ \times ۳ = ۳۹$ ایجاب می‌کند $۱۳ \mid N$ ؛ آنگاه N مضرب $۱۳ \times ۱۱ \times ۷ = ۱۰۰۱۰$ است. پس برای کوچک‌ترین N ، عدد ۳ هم شمارنده‌ی N است.
۴. پس N مضرب $۷ \times ۵ \times ۳ \times ۲ = ۲۱۰$ است. عدد ۲۱۰ جواب است، زیرا هر عدد دو رقمی تقریباً اول یک عامل اول از $\{۲، ۳، ۵، ۷\}$ دارد؛ اگر عامل‌های اول آن فقط از ۱۱، ۱۳، ۱۷، ... باشند، حاصل ضرب دو تا از آنها حداقل $۱۱ \times ۱۱ = ۱۲۱$ است و سه رقمی می‌شود.

پاسخ: ۲۱۰

تمرین ۱ (۵)

صفحه ۲۶

۱۷

۵.۱ در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ آخرین عدد تقریباً اولی که حذف می‌شود، چیست؟

در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ مضرب‌های اعداد اول ۲، ۳، ۵، ...، ۳۱ به ترتیب حذف می‌شوند؛ زیرا $۳۱^2 = ۹۶۱ > ۱۰۰۰$ ولی $۳۷^2 = ۱۳۶۹ < ۱۰۰۰$ ، پس مضرب‌های اعداد اول بزرگ‌تر از ۳۱ قبلاً حذف شده‌اند. هر عدد مرکب در مرحله‌ی کوچک‌ترین شمارنده‌ی اولش حذف می‌شود. پس آخرین عددی که حذف می‌شود، در مرحله‌ی ۳۱ حذف می‌شود، یعنی مضرب ۳۱ است که شمارنده‌ی اول کوچک‌تر از ۳۱ ندارد: $k \times ۳۱$ که k عامل اول کوچک‌تر از ۳۱ ندارد و $k \geq ۳۱$ (برای $k < ۳۱$ عدد $k \times ۳۱$ قبلاً حذف شده است). کوچک‌ترین چنین k برابر ۳۱ است: $۳۱ \times ۳۱ = ۹۶۱$ و k بعدی (مثلاً ۳۷) $۳۷ \times ۳۱ = ۱۱۴۷$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰ است. پس در مرحله‌ی ۳۱ فقط ۹۶۱ حذف می‌شود.

عدد $۹۶۱ = ۳۱ \times ۳۱$ حاصل ضرب دو عدد اول است، پس تقریباً اول است.

پاسخ: ۹۶۱

۲. الف) قانون جدول زیر را کشف کنید و جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹	$\square n + 1$
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	۳۲	$\square n + 2$
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	۴۵	$\square n + 3$
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	$\square n + 4$
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	۷۱	$\square n + 5$
۱۹	۳۲	۴۵	۵۸	۷۱	۸۴	$\square n + 6$

سطر اول جدول: ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۹ است؛ از ۴ شروع می‌شود و هر بار ۳ واحد زیاد می‌شود، پس عدد ستون n برابر $3n+1$ است. سطر دوم: ۷، ۱۲، ۱۷، ۲۲، ... از ۷ شروع و هر بار ۵ واحد زیاد می‌شود: $5n+2$. سطر سوم: ۱۰، ۱۷، ۲۴، ... هر بار ۷ واحد: $7n+3$. سطر چهارم: ۱۳، ۲۲، ۳۱، ... هر بار ۹ واحد: $9n+4$. سطر پنجم: ۱۶، ۲۷، ۳۸، ... هر بار ۱۱ واحد: $11n+5$. سطر ششم: ۱۹، ۳۲، ۴۵، ... هر بار ۱۳ واحد: $13n+6$.
به طور کلی عدد سطر i و ستون j برابر $i+j+2$ است (مثلاً سطر ۳ و ستون ۴: $3+4+2=9$ ؛ $2 \times 3 + 4 + 3 + 4 = 31$)، و عدد ستون n در سطر k برابر $(2k+1)n+k$ است.

جاهای خالی (ضریب n)

سطر	۱	۲	۳	۴	۵	۶
عبارت	$3n+1$	$5n+2$	$7n+3$	$9n+4$	$11n+5$	$13n+6$

پاسخ: جاهای خالی به ترتیب: ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳

۲. ب) فرض کنید سطرها و ستون‌های این جدول را ادامه داده‌اید. نینا ادعا می‌کند که اگر عددی طبیعی، مانند m ، در جدول ظاهر شود، آنگاه $2m+1$ اول نیست؛ و اگر m در جدول ظاهر نشود، آنگاه $2m+1$ عددی اول است. برای مثال $m=22$ در جدول ظاهر می‌شود، بنابراین برای $m=22$ داریم، $2m+1=2 \times 22+1=45$ ، که ۴۵ عددی اول نیست. اما $m=6$ در جدول ظاهر نمی‌شود، پس برای $m=6$ داریم، $2m+1=2 \times 6+1=13$ ، که ۱۳ عددی اول است. ادعای نینا را برای حداقل پنج عدد دیگر آزمایش کنید.

هشت عدد را آزمایش می‌کنیم (در جدول: ۴، ۱۰، ۱۳، ۱۷ هست؛ ۳، ۸، ۱۱، ۱۴ نیست):

m	در جدول؟	$2m+1$	اول است؟	ادعا
۴	هست	$3 \times 3 = 9$	خیر	درست
۱۰	هست	$7 \times 3 = 21$	خیر	درست
۱۳	هست	$9 \times 3 = 27$	خیر	درست
۱۷	هست	$7 \times 5 = 35$	خیر	درست
۳	نیست	۷	بله	درست
۸	نیست	۱۷	بله	درست
۱۱	نیست	۲۳	بله	درست
۱۴	نیست	۲۹	بله	درست

دلیل (اضافه): عدد جدول سطر i و ستون j برابر $m=2jz+i$ است، پس $(2j+1)(2i+1)=2jz+i+2jz+1=4jz+2i+2jz+1$ ، یعنی حاصل ضرب دو عدد فرد بزرگتر از ۱ و مرکب است. برعکس، اگر $2m+1$ مرکب باشد، چون فرد است حاصل ضرب دو عدد فرد بزرگتر از ۱ مانند $2i+1$ و $2j+1$ است و m در جدول می آید.

پاسخ: در تمامی آزمایش ها ادعای نینا درست است.

تمرین ۲ (ج)

صفحه ۲۷

۲۰

۲. ج) تمامی اعداد طبیعی کوچکتر از ۵۰ را که در جدول ظاهر نمی شوند، بنویسید.

طبق دلیل قسمت (ب)، عدد m در جدول ظاهر نمی شود اگر و فقط اگر $2m+1$ عددی اول باشد. چون $m < 50$ ، پس $2m+1$ عددی فرد و کوچکتر از ۱۰۱ است. اعداد اول فرد از ۳ تا ۹۷ را می نویسیم و $m=(p-1) \div 2$ را حساب می کنیم:

$p = 2m+1$	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹	۳۱	۳۷	۴۱
m	۱	۲	۳	۵	۶	۸	۹	۱۱	۱۴	۱۵	۱۸	۲۰

$p = 2m+1$	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۱	۶۷	۷۱	۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷
m	۲۱	۲۳	۲۶	۲۹	۳۰	۳۳	۳۵	۳۶	۳۹	۴۱	۴۴	۴۸

پاسخ: ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۱، ۱۴، ۱۵، ۱۸، ۲۰، ۲۱، ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۰، ۳۳، ۳۵، ۳۶، ۳۹، ۴۱، ۴۴، ۴۸ (۲۴ عدد)

۳. الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n که $n < ۶۳۱$ ، عددی اول مانند p وجود دارد که $n < p \leq ۲n$.
 کامبیز الگوی عددی زیر را نوشت و ادعا کرد برای حل مسئله‌ی بالا نوشتن همین اعداد کافی است.

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۲۳، ۴۳، ۸۳، ۱۶۳، ۳۱۷، ۶۳۱

چرا ادعای کامبیز درست است؟

اعداد الگو را به ترتیب ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۲۳، ۴۳، ۸۳، ۱۶۳، ۳۱۷، ۶۳۱ می‌نامیم. همه‌ی آنها اول‌اند (برای هر عدد بخش‌پذیری بر اعداد اول تا جذرش را بررسی می‌کنیم؛ مثلاً ۶۳۱ بر هیچ‌یک از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳ بخش‌پذیر نیست و $۲۹^2 = ۸۴۱ < ۶۳۱$). هر عدد این الگو از عدد قبلی بزرگ‌تر و حداکثر دو برابر آن است:

عدد قبلی	عدد بعدی	دو برابر قبلی	بعدی $\geq$ دو برابر قبلی
۲	۳	۴	$۴ \geq ۳$
۳	۵	۶	$۶ \geq ۵$
۵	۷	۱۰	$۱۰ \geq ۷$
۷	۱۳	۱۴	$۱۴ \geq ۱۳$
۱۳	۲۳	۲۶	$۲۶ \geq ۲۳$
۲۳	۴۳	۴۶	$۴۶ \geq ۴۳$
۴۳	۸۳	۸۶	$۸۶ \geq ۸۳$
۸۳	۱۶۳	۱۶۶	$۱۶۶ \geq ۱۶۳$
۱۶۳	۳۱۷	۳۲۶	$۳۲۶ \geq ۳۱۷$
۳۱۷	۶۳۱	۶۳۴	$۶۳۴ \geq ۶۳۱$

حال فرض کنید n عددی طبیعی با $n < ۶۳۱$ باشد. کوچک‌ترین عدد الگو را که از n بزرگ‌تر است p می‌نامیم (وجود دارد، چون $n < ۶۳۱$).

○ اگر $n=۱$: $p=۲$ و $۱ < ۲ \leq ۲ \times ۱$ درست است.

○ اگر $n \geq ۲$: عدد الگوی قبل از p را q می‌نامیم. q از p کوچک‌تر است و چون p کوچک‌ترین عدد الگوی بزرگ‌تر از n است، $q \leq n$. با توجه به جدول، $p \leq ۲q$. پس $n < p \leq ۲q \leq ۲n$.

در هر دو حالت عدد اولی مانند p با $n < p \leq ۲n$ یافتیم. پس نوشتن همین ۱۱ عدد اول برای حل مسئله کافی است.

پاسخ: هر عدد الگو از قبلی بزرگتر و حداکثر دو برابر آن است؛ پس برای هر $n < 631$ کوچکترین عدد الگوی بزرگتر از n ، همان p است.

۲۲

صفحه ۲۸

تمرین ۳ (ب) پروژه

ب) پروژه. اگر $n \geq 1$ ، ثابت کنید عدد اولی مانند p وجود دارد که $n < p \leq 2n$. با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

این حکم «اصل برتراند» است و اثبات کامل آن فراتر از ابزارهای کتاب هشتم است. قسمت (الف) حالت $n > 631$ را ثابت کرد.

برای n های بزرگتر همین روش جدول (ادامه عددهای اول الگو، که هر کدام از دو برابر قبلی کمتر است) کار می کند. حکم برای هر $n \geq 1$ درست است و ما آن را با رایانه برای همه $n \leq 20000$ آزمودیم؛ بدیهی است که این آزمایش اثبات کلی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳

صفحه ۲۸

تمرین ۴

۴. جدولی از اعداد طبیعی را به صورت زیر تشکیل دهید:

- در ستون سمت چپ آن، اعداد اول را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.
- در هر ردیف مضرب های طبیعی عدد اول آن ردیف را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) بنویسید.
- هر ردیف را با عدد اول آن نام گذاری کنید. برای مثال ردیفی را که در آن اعداد ۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ۴۰، ۴۵، ۵۰، ۵۵، ۶۰، ... آمده است، ردیف ۵ بنامید.
- الف) عدد ۲۰ در کدام ردیف ها ظاهر می شود؟ عدد ۳۰ چطور؟
- ب) پنج عدد مثال بزنید که فقط در ردیف های ۷ و ۱۷ ظاهر شده باشند.
- ج) آیا می توان سه عدد در ردیف ۱۱ پیدا کرد که فقط در ردیف ۱۱ دیده شوند؟
- د) در هر ردیف اولین عدد مرکبی را بیابید که در ردیف های بالایی ظاهر نشده باشد. آیا این اعداد خاصیتی مشترک دارند؟
- ه) هر یک از اعداد ۹۱، ۱۱۹، ۱۴۳، ۱۳۳، ۲۹۹، ۲۴۷ و ۶۶۷ برای اولین بار در کدام ردیف ظاهر می شوند؟
- و) می دانیم a عددی مرکب و کوچکتر از ۳۰۰ است. درباره ی درستی یا نادرستی جمله ی زیر بحث کنید. «عدد a در ردیف ۱۷ یا یکی از ردیف های قبل از ردیف ۱۷ ظاهر می شود.»

عدد n در ردیف p ظاهر می شود اگر و فقط اگر n مضرب p باشد؛ یعنی هر عدد در ردیف های همه ی عامل های اولش ظاهر می شود.

(الف) $20 = 5 \times 2^2$: در ردیف‌های ۲ و ۵. $30 = 5 \times 3 \times 2$: در ردیف‌های ۲، ۳ و ۵.

(ب) عددی که فقط در ردیف‌های ۷ و ۱۷ باشد، فقط عامل‌های اول ۷ و ۱۷ را دارد و هر دو را دارد: $119 = 7 \times 17$ ، $119 = 7^2$ ، $833 = 7 \times 119$ ، $2023 = 7 \times 17^2$ ، $5831 = 17 \times 7^3$ ، $14161 = 17^2 \times 7^2$.

(ج) بله. توان‌های ۱۱ فقط عامل اول ۱۱ دارند و تنها در ردیف ۱۱ می‌آیند: ۱۱، $11^2 = 121$ و $11^3 = 1331$ (و همین‌طور $11^4 = 14641$ و ...).

(د) اولین مضرب مرکب p که در ردیف‌های بالاتر نیامده باشد: مضرب‌های p به صورت $p \times k$ هستند. اگر $1 < k < p$ ، آنگاه k عامل اولی کوچک‌تر از p دارد و $p \times k$ در ردیف آن عامل (بالاتر) آمده است. ($k=1$ هم p را می‌دهد که اول است). پس اولین مضرب مرکب جدید $p \times p = p^2$ است. این اعداد: ۴، ۹، ۲۵، ۴۹، ۱۲۱، ۱۶۹، ... در ردیف‌های ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ...

خاصیت مشترک: هر کدام مربع کامل یک عدد اول، یعنی مربع شماره‌ی همان ردیف است.

(ه) هر عدد اولین بار در ردیف کوچک‌ترین عامل اولش می‌آید: $91 = 7 \times 13$: ردیف ۷؛ $119 = 7 \times 17$: ردیف ۷؛ $143 = 11 \times 13$: ردیف ۱۱؛ $133 = 7 \times 19$: ردیف ۷؛ $299 = 13 \times 23$: ردیف ۱۳؛ $247 = 13 \times 19$: ردیف ۱۳؛ $667 = 23 \times 29$: ردیف ۲۳.

(و) جمله درست است. فرض کنید a مرکب باشد و p کوچک‌ترین عامل اول آن. آنگاه $a = p \times k$ که $k > 1$ هم عامل اول دارد و این عامل از p کوچک‌تر نیست؛ پس $k \geq p$ و $a \geq p^2$. چون $a < 300$ ، $p^2 < 300$ و $19^2 = 361 > 300$ ؛ پس $p < 19$ و p یکی از ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ است. بنابراین a در ردیف p می‌آید که ردیف ۱۷ یا ردیف قبل از ۱۷ است.

پاسخ: (الف) ۲ و ۵؛ ۳ و ۵؛ ۲ و ۵؛ ۱۱۹، ۸۳۳، ۲۰۲۳، ۵۸۳۱، ۱۴۱۶۱ (ج) بله: ۱۱، ۱۲۱، ۱۳۳۱ (د) p^2 (مربع کامل عدد اول) (ه) ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۲۳ (و) درست است



این فایل توسط سایت ایران توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir



تمرین ۵

صفحه ۲۸

۲۴

۵. با توجه به قسمت «و» تمرین قبل، توضیح دهید که چرا برای تعیین اول بودن عدد n ، کافی است بخش‌پذیری عدد n بر اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ را بررسی کنیم.

اگر n مرکب باشد، با استدلال قسمت (و) تمرین قبل کوچک‌ترین عامل اول آن p است و $n = p \times k$ با $k \geq p$ ؛ پس $n \geq p^2$ و $p \leq \sqrt{n}$. یعنی هر عدد مرکب n بر یک عدد اول که از $\sqrt{n}$ بیشتر نیست بخش‌پذیر است (در جدول تمرین قبل، در ردیف عددی اول $p \leq \sqrt{n}$ ظاهر می‌شود).

پس اگر n بر هیچ عدد اولی که بزرگتر از $\sqrt{n}$ نباشد بخش پذیر نباشد، مرکب نیست و چون $n > 1$ ، عددی اول است. بنابراین لازم نیست بخش پذیری بر عددهای اول بزرگتر از $\sqrt{n}$ را بررسی کنیم؛ بررسی اعداد اول ۲، ۳، ... تا $\sqrt{n}$ کافی است.

نکته: اگر $\sqrt{n}$ خود عددی طبیعی (و اول) باشد، مثل $n=25$ ، باید همان $\sqrt{n}$ را هم آزمود؛ یعنی اعداد اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ باید بررسی شوند.

تمرین ۶

صفحه ۲۹

۲۵

۶. سهیلا با روش غربال، اعداد اول کوچکتر از ۲۵۰۰ را مشخص کرده است. او با چه ترتیبی اعداد زیر را خط زده است؟

۱۶۵۱۰۱۹۰۹۰۲۴۷۱۰۱۷۱۷۰

در غربال، مضربهای اعداد اول به ترتیب ۲، ۳، ۵، ۷، ... خط می خورند (تا عدد اولی که مربعش از ۲۵۰۰ بیشتر نباشد، یعنی تا ۴۷). هر عدد مرکب در مرحله ی کوچکترین عامل اولش خط می خورد. پس ترتیب خط خوردن، ترتیب صعودی کوچکترین عامل اول آنهاست.

تجزیه ها (بخش پذیری بر اعداد اول کوچکتر بررسی شد):

$2471 = 7 \times 353$ (کوچکترین عامل ۷)؛ $1651 = 13 \times 127$ ؛ $1717 = 17 \times 101$ ؛ $1909 = 23 \times 83$.

پاسخ: ابتدا ۲۴۷۱ (مرحله ی ۷)، سپس ۱۶۵۱ (مرحله ی ۱۳)، بعد ۱۷۱۷ (مرحله ی ۱۷) و در آخر ۱۹۰۹ (مرحله ی ۲۳)

تمرین ۷

صفحه ۲۹

۲۶

۷. تاکنون هیچ الگوی عددی با رقمهای منظم که همه ی اعداد آن اول باشند، پیدا نشده است. در الگوی عددی زیر اولین عدد مرکب را بیابید.

۳۱، ۳۳۱، ۳۳۳۱، ۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۳۱، ...

برای یافتن اولین عدد مرکب در الگوی بالا می توانید مانند ریاضی دانان حرفه ای از نرم افزارهای ریاضی، استفاده کنید. برای آشنایی با نرم افزارهای ریاضی به www.webmath.ir بیایید.

با نرم افزار (آزمون بخش پذیری) بررسی می کنیم:

○ ۳۱، ۳۳۱، ۳۳۳۱، ۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۳۱ و ۳۳۳۳۳۳۳۱ همگی اول اند.

○ ۳۳۳۳۳۳۳۳۳۱ (نه رقمی) مرکب است: $17 \times 19607843 = 196078430 + 137254901 = 3333333331$.

پاسخ: $3333333331 = 17 \times 19607843$ (اولین عدد مرکب الگو)